
SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

E. LANCONELLI

"SOLUZIONI IN \mathbb{R}^n DI EQUAZIONI DI POISSON SEMILINEARI"

13 DICEMBRE 1984

Sunto. Si presenta un metodo variazionale che consente di provare l'esistenza di soluzioni classiche non banali dell'equazione di Poisson semilineare

$$(*) \quad \Delta u + f(u) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n, \quad n \geq 2,$$

dove $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua e dispari.

I risultati che si espongono sono dovuti a Strauss ([S]), Coleman-Glazer-Martin ([C-G-M]), Berestycki-Lions ([B-L]) e a Berestycki-Gallouet-Kavian ([B-G-K]).

Nel seguito si indicherà sempre con F la funzione

$$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(t) = \int_0^t f(\sigma) d\sigma.$$

1. CONDIZIONI NECESSARIE PER L'ESISTENZA DI SOLUZIONI CLASSICHE NON BANALI DI (*)

1.A. (Identità di Pohozaev). Sia $u \in C^{(2)}(\mathbb{R}^n)$ una soluzione di (*) tale che

$$(1.1) \quad u \in H^1(\mathbb{R}^n), \quad F(u) \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

Se indichiamo con S_R la sfera di \mathbb{R}^n di centro 0 e raggio $R > 0$, e con ν la normale esterna a ∂S_R , risulta ($Du =$ gradiente di u):

$$\begin{aligned}
 (1.2) \quad & (n-2) \int_{S_R} |Du|^2 dx - 2n \int_{S_R} F(u) dx = \\
 & = -R \left(\int_{\partial S_R} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 d\sigma + 2 \int_{\partial S_R} F(u) d\sigma \right)
 \end{aligned}$$

Questa identità si ottiene moltiplicando (*) per $\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)$ e integrando, successivamente, su S_R .

Integrando per parti il primo integrale al primo membro di (1.2) e tenendo conto ancora della (*), si ricava

$$\begin{aligned}
 (1.3) \quad & \int_{S_R} ((n-2)uf(u) - 2n F(u)) dx = \\
 & = -R \left(\int_{\partial S_R} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 dx + 2 \int_{\partial S_R} F(u) d\sigma \right) - \int_{\partial S_R} u \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma
 \end{aligned}$$

Ora, in forza della (1.1), riesce

$$\int_{R^n} (|Du|^2 + |F(u)|) dx = \int_0^{+\infty} \left(\int_{\partial S_R} (|Du|^2 + |F(u)|) d\sigma \right) dR < +\infty;$$

esiste quindi una successione $R_k \rightarrow +\infty$ tale che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} R_k \int_{\partial S_{R_k}} (|Du|^2 + |F(u)|) d\sigma = 0$$

Dalle (1.2) e (1.3) si ricava allora:

$$(1.4) \quad (n-2) \int_{\mathbb{R}^n} |Du|^2 dx = 2n \int_{\mathbb{R}^n} F(u) dx ,$$

$$(1.5) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{S_{R_k}} ((n-2)u f(u) - 2n F(u)) dx = 0$$

In definitiva:

a) se $u \neq 0$ è una soluzione (classica) di (*) verificante (1.1) allora

$$(1.6) \quad \exists \xi > 0 : F(\xi) > 0.$$

L'affermazione discende dalla (1.4) nel caso di $n \geq 3$ e dalla (1.2) nel caso di $n = 2$;

b) se

$$(1.7) \quad (n-2)t f(t) - 2n F(t) > 0 , \quad \text{per } t \neq 0,$$

allora (*) non ha soluzioni classiche non banali verificanti (1.1).

Ciò segue immediatamente dalla (1.5).

Esempio. Il problema

$$(1.8) \quad \begin{cases} \Delta u - u + |u|^{p-1} u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n, \quad n \geq 3, \\ u \in C^2, \quad 0 < u(x) \rightarrow 0 & \text{per } |x| \rightarrow +\infty \end{cases}$$

non ha soluzione se $p \geq \frac{n+2}{n-2}$.

Infatti, se u è soluzione di (1.8), risulta $u(x)$, $|Du(x)| = (e^{-m|x|})$ per $|x| \rightarrow +\infty$ e per ogni $m \in]0,1[$ (Cfr. ad esempio [L]). In particolare allora $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ e $F(u) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Qui $f(t) = -t + |t|^{p-1}t$ e, quindi, $F(t) = -\frac{t^2}{2} + \frac{|t|^{p+1}}{p+1}$. Poiché riesce

$$(n-2)tf(t) - 2nF(t) = 2t^2 + |t|^{p+1} \left((n-2) - \frac{2n}{p+1} \right),$$

se $p \geq \frac{n+2}{n-2}$ vale la (1.7) ed allora (1.8) non ha soluzione.

1.B. Se $f \in C^{(2)}$ e se $f'(0) > 0$, l'equazione (*) non ha soluzioni classiche u tali che $u(x) = o\left(\frac{1}{|x|}\right)$ per $|x| \rightarrow +\infty$, $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Infatti, sia $f'(0) = m > 0$ e sia $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ verificante (*) e tale che $u(x) = o\left(\frac{1}{|x|}\right)$ per $|x| \rightarrow +\infty$ e $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Allora

$$(1.9) \quad (-\Delta + q(x))u = mu$$

dove $q(x) = \left(m - \frac{f(u)}{u}\right) = o\left(\frac{1}{|x|}\right)$ per $|x| \rightarrow +\infty$.

Ma, per un risultato di Kato ([K], pag. 404), non esistono $u \in C^{(2)}(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ verificanti (1.9) con $m > 0$ e $q(x) = o\left(\frac{1}{|x|}\right)$ per $|x| \rightarrow +\infty$.

2. ESISTENZA DI SOLUZIONI CLASSICHE DI (*)

In questo paragrafo, utilizzando un metodo di minimizzazione vincolata, mostreremo il Teorema seguente.

Teorema 2.1. Supponiamo:

(H.1) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, continua e dispari;

(H.2) $\exists \xi > 0: F(\xi) > 0$;

(H.3) $f(t) = -t + f_1(t)$ con $f_1(t) = o(t)$ per $t \rightarrow 0$,

$f_1(t) = o(t^1)$ per $t \rightarrow +\infty$, $1 = \frac{n+2}{n-2}$ se $n \geq 3$, $1 \in \mathbb{R}^+$ se $n \geq 2$.

Allora il problema

$$\Delta u + f(u) = 0 \text{ in } \mathbb{R}^n$$

(2.1)

$$u \in C^2(\mathbb{R}^n), 0 < u(x) \rightarrow 0 \text{ pm } |x| \rightarrow +\infty, u \not\equiv 0$$

ha almeno una soluzione.

Nota 2.2. Le tecniche che useremo nel seguito si adattano, senza difficoltà, al caso in cui, in luogo di (H.3), vale

$$(H.3') \quad (a) \quad -\infty < \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} \leq \overline{\lim}_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} \leq -m < 0$$

$$(b) \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{t^1} \leq 0$$

(Cfr. [B-L]). Nel caso di $n = 2$ l'ipotesi (b) può essere ulteriormente indebolita. Basta infatti supporre

$$(H.3') \quad (b') \quad f(t) = O(e^{\alpha t^2}) \text{ per } t \rightarrow +\infty, \quad \alpha > 0.$$

(Cfr. [B-G-K]).

Osservazione 2.3. Se $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ allora $F(u) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Infatti, per le ipotesi (H.1) e (H.3) riesce

$$|F(u)| \leq C(|u|^2 + |u|^{1+1}) \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

in quanto, per il Teorema di Sobolev, $H^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{1+1}(\mathbb{R}^n)$. Si verifica inoltre, senza difficoltà, che il funzionale

$$(2.2) \quad V: H^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}, \quad V(u) = \int_{\mathbb{R}^n} F(u) \, dx$$

è differenziabile secondo Fréchet in ogni punto, che è di classe $C^{(1)}$ e che

$$dV(u)(h) = \int_{\mathbb{R}^n} f(u) \, h \, dx, \quad \forall h \in H^1(\mathbb{R}^n).$$

È inoltre immediato che anche il funzionale

$$(2.3) \quad T: H^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}, \quad T(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |Du|^2 \, dx,$$

è di classe C^1 e che

$$dT(u)(h) = \int_{\mathbb{R}^n} Du \cdot Dh \, dx, \quad \forall h \in H^1.$$

Ma allora $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ è soluzione debole di

$$(2.4) \quad \Delta u + f(u) = 0$$

se, e solo, se u è un punto critico del funzionale

$$(2.5) \quad S = T - V$$

Ora, nella ricerca di punti critici di S si incontrano due ordini di difficoltà:

- i) S non è limitato, tanto inferiormente quanto superiormente
- ii) S non ha proprietà di compattezza di tipo Palais-Smale, a causa, essenzialmente, del fatto che la immersione di $H^1(\mathbb{R}^n)$ in $L_p(\mathbb{R}^n)$ ($1 \leq p < \frac{2n}{n-2}$) non è compatta.

D'altra parte, nel caso particolare di $f(u) = -u + u^3$ e di $n=3$, Coffman ([C]) ha provato l'esistenza di una sola $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ (unica a meno di una traslazione sulle variabili $x \in \mathbb{R}^3$) che minimizza il funzionale

$$I(u) = \int_{\mathbb{R}^3} \left(\left(\frac{|Du|}{2} \right)^2 + \frac{u^2}{2} \right) dx$$

sotto il vincolo

$$M = \{u \in H^1(\mathbb{R}^n) ; 1 = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{u^4}{4} dx \equiv \int_{\mathbb{R}^3} (F(u) - \frac{u^2}{2}) dx\}$$

Per il Teorema di Lyusternik sugli estremi condizionati, esistono allora $u \in M$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tali che

$$dJ(u) = \lambda d\left(\int_{\mathbb{R}^3} v^4 dx\right) \Big|_{v=u}$$

In altri termini, u è soluzione debole non banale dell'equazione $\Delta u - u + \lambda u^3 = 0$. La funzione $v = \lambda^{-1/3} u$ diventa allora soluzione debole non banale dell'equazione $\Delta v - v + v^3 = 0$ in \mathbb{R}^3 .

L'estensione del metodo degli estremi vincolati a situazioni via via più generali di quella considerata da Coffman si deve a Strauss ([S]), Coleman-Glazer-Martin ([C-G-M]) e a Berestycki-Lions ([B-L]). Tali estensioni si fondano sul seguente corollario del Teorema di Lyusternik sugli estremi vincolati.

Teorema 2.4. Sia X uno spazio di Banach reale e siano $T, V \in C^{(1)}(X, \mathbb{R})$ tali che $T(0) = V(0) = 0$.

Supponiamo inoltre

i) T è sequenzialmente debolmente inferiormente semicontinuo, $T \geq 0$, $dT(u) \neq 0$ se $u \neq 0$, $T(tu) \leq T(u)$ per $0 \leq t \leq 1$.

ii) $M = \{u \in X; V(u) = 1\}$ è una varietà regolare di X ;

iii) esiste una successione (u_p) in M tale che

$$T(u_p) \rightarrow \inf T/M, \quad u_p \xrightarrow[X]{deb} u, \quad V(u) \geq 1$$

Allora esistono $v \in M$ e $\lambda > 0$ tali che $dT(v) = \lambda dV(v)$.

Dimostrazione. Siano (u_p) e u dati da iii).

Allora $T(u) \leq \inf T/M$ e $V(u) \geq 1$. Poiché l'applicazione $[0,1] \ni t \rightarrow V(tu) \in \mathbb{R}$ è continua, vale 0 per $t = 0$ ed è ≥ 1 per $t = 1$, esiste $\sigma \in [0,1]: V(\sigma u) = 1$. Allora $\sigma u \in M$ e, quindi, $T(\sigma u) \leq \inf T/M$. In definitiva $v = \sigma u$ è un punto di minimo di T/M e, per il Teorema di Lyusternik, esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $dT(v) = \lambda dV(v)$.

Poiché $v \in M$ e $0 \notin M$, deve essere $\lambda \neq 0$. Proviamo che $\lambda > 0$. Supponiamo, per assurdo, $\lambda < 0$. Sia $h \in X: dV(v)(h) > 0$ ($dV(v) \neq 0$ perché M è una varietà regolare di X). Per $0 < t < 1$, si ha:

$$T(v+th) = T(v) + t(dT(v)(h)+o(1)) = T(v) + \lambda t(dV(v)h+ o(1))$$

e, quindi, poiché $\lambda < 0$, $T(v + th) < T(v)$ per $0 < t < \bar{t}$ e per un opportuno \bar{t} . Analogamente

$V(v + th) = V(v) + t(dV(v)(h) + 0(1)) > V(v) = 1$ per $0 < t < \bar{t}$ e per un opportuno \bar{t} .

Esiste allora $\delta \in [0, 1]$ tale che $V(\delta(v + th)) = 1$ e $T(\delta(v + th)) \leq T(v + th) < T(v) = \inf T/M$. Ciò è assurdo perché $\delta(v + th) \in M$.

Dimostrazione del Teorema 2.1. Nel caso $n \geq 3$ applichiamo il Teorema precedente con $X = H^1(\mathbb{R}^n)$ e con V e T dati da (2.1) e da (2.2). La verifica di i) e di ii) è immediata, con la sola eccezione della prova che $M \neq \emptyset$. A questo scopo si usa l'ipotesi (H.2).

Verifichiamo la iii). Sia (v_p) una successione in M tale che $\lim_{p \rightarrow +\infty} T(v_p) = \inf T/M = I$. Se (u_p) indica la simmetrizzata radiale di v_p , allora $0 \leq u_p \in H^1(\mathbb{R}^n)$, $V(u_p) = V(v_p)$ e $T(u_p) \leq T(v_p)$. In particolare (u_p) è ancora una successione minimizzante di T/M .

Se $n \geq 3$ (u_p) è limitata in $H^1(\mathbb{R}^n)$. Infatti, per l'ipotesi (H.3), se $F_1(t) = \int_0^t f_1(s) ds$, si ha

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{2} u_p^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^n} F_1(u_p) dx - V(u_p) \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{4} u_p^2 + C |u|^{1+1} \right) dx - 1 \leq \text{(per la disuguaglianza di Poincaré-Sobolev)} \leq \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^n} u_p^2 dx + C_1 \|Du\|_{L_2}^{1+1} ;$$

quindi

$$\int_{\mathbb{R}^n} u_p^2 dx \leq 4 C_1 (2 T(u_p))^{1+1/2}.$$

Ciò prova la limitatezza di (u_p) in L_2 e, quindi, in H^1 . D'altra parte, se $n = 2$, posto

$$u_p^*(x) = u_p(\delta_p x), \quad \delta_p = (\|u_p\|_{L_2})^{-1},$$

si ottiene $T(u_p^*) = T(u_p)$ e $\|u_p^*\|_{L_2} = 1$.

In questo caso basta allora sostituire (u_p) con (u_p^*) per ottenere una successione minimizzante limitata in H^1 .

Ora, poiché (u_p) è limitata in H^1 , eventualmente passando ad una sottosuccessione possiamo supporre $u_p \xrightarrow{deb} u$ in H^1 q.d..

Verifichiamo che $V(u) \geq 1^{(*)}$. Richiamiamo anzitutto i seguenti Lemmi ([S], pag. 155-156).

Lemma (comportamento asintotico delle funzioni radiali di H^1).

Se $u \in H^1$ è radialmente simmetrica, allora

$$|u(x)| \leq C \|u\|_{H^1} |x|^{-(n-1)/2}, \quad x \in \mathbb{R}^n, |x| \geq R_0$$

(C ed R_0 indipendenti da u).

(*) Se $n = 2$, il procedimento si modifica così: $M = \{u \in H^1 : u \neq 0, V(u) = 0\}$. Si dovrà allora provare che $V(u) \geq 0$.

Lemma (compattezza). Siano P e $Q \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tali che $P(s)/Q(s) \rightarrow 0$ per $s \rightarrow +\infty$ e per $s \rightarrow 0$. Sia (u_p) una successione di funzioni misurabili in \mathbb{R}^n tale che

$$\sup_p \int_{\mathbb{R}^n} |Q(u_p)| dx < +\infty, \quad P(u_p) \rightarrow v \text{ q.d.},$$

$u_p(x) \rightarrow 0$ per $|x| \rightarrow \infty$, uniformemente in p .

Allora $P(u_p) \rightarrow v$ in $L_1(\mathbb{R}^n)$.

Poiché, grazie all'ipotesi (H.3),

$$\frac{F_1(s)}{s^2 + |s|^{1+1}} \rightarrow 0 \text{ per } s \rightarrow 0 \text{ e per } s \rightarrow +\infty$$

e poiché, per la disuguaglianza di Sobolev

$$\sup_p \int_{\mathbb{R}^n} (u_p^2 + |u_p|^{1+1}) dx \leq C \sup_p \|u_p\|_{H^1} < +\infty,$$

in virtù dei due Lemmi precedenti, riesce

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} F_1(u_p) dx = \int_{\mathbb{R}^n} F_1(u) dx$$

Pertanto:

$$\begin{aligned}
 V(u) &= -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} u^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} F_1(u) dx \geq -\lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} u_p^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} F_1(u_p) dx \right) \\
 &= \lim_{p \rightarrow +\infty} V(u_p) = 1.
 \end{aligned}$$

Sono quindi verificate le ipotesi del Teorema 2.4. Esistono allora $\lambda > 0$ e $v \in M$: $dT(v) = \lambda dV(v)$.

Osserviamo inoltre che $v \geq 0$ e $v \neq 0$ ($v \in M$). La funzione $u(x) = v\left(\frac{x}{\lambda}\right)$ è quindi soluzione debole non banale e non negativa di (*).

Mostriamo infine come si prova la regolarità $C^{(2)}$ di u . Posto $q = \frac{f(u)}{u}$ riesce $q \in L^{n/2} + L^\infty$ e $\Delta u + q(x)u = 0$. Allora, per un risultato di Bézis-Kato [B-K], $u \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^n) \forall p \in [1, +\infty[$ e, quindi, anche $f(u) \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^n) \forall p \in [1, +\infty[$.

Ne segue che $u \in W_{loc}^{2,p}(\mathbb{R}^n)$ per ogni $p \in [1, +\infty[$ e quindi $u \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^n) \forall \alpha \in [0,1[$.

La regolarità $C^{(2)}$ di u segue ora dal fatto che, posto $u(x) = \psi(|u|)$, risulta $\psi'' + \frac{n-1}{2} \psi' + f(\psi) = 0$.

Osservazione 2.5. Soluzioni positive dell'equazione di Poisson semilineare in \mathbb{R}^n , si possono trovare anche seguendo un metodo du rispetto a quello utilizzato in precedenza. Precisamente si possono trovare soluzioni di (*) studiando il problema

$$(2.6) \quad \max_N V, \quad N = \{u \in H^1(\mathbb{R}^n); T(u) = 1\}$$

La varietà N è il bordo della sfera unitaria di $A =$ chiusura di $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ rispetto alla norma $\|Du\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}$.

Utilizzando la teoria dei punti critici fondata sul princi-

pio di minimax, adattando opportunamente alcune tecniche sviluppate da Rabinowitz in [R] Berestycki e Lions [B-L] hanno provato che il funzionale V ha infiniti punti critici su

$$N_r = \{u \in N / u \text{ radialm. simm.}\};$$

di qui essi hanno successivamente dedotto l'esistenza di infinite soluzioni (non necessariamente ≥ 0) dell'equazione (*), generalizzando precedenti risultati di [C], [S], ecc.

Osservazione 2.6. Le tecniche presentate nelle righe precedenti non sono applicabili ad equazioni non autonome del tipo seguente

$$(2.7) \quad \Delta u + f(x, u) = 0,$$

né alle equazioni ellittiche semilineari a coefficienti variabili come la seguente

$$(2.8) \quad \sum_{i,j} a_{ij}(x) \partial_j u + f(u) = 0$$

Il problema di determinare soluzioni su tutto \mathbb{R}^n per equazioni generali del tipo (2.7) e (2.8), per quanto ci risulta, è ancora aperto.

Concludiamo indicando un esempio di applicazione del Teorema 2.1.

Esempio 2.7. Consideriamo il problema

$$(2.9) \quad \begin{cases} \Delta u - u + \lambda |u|^{p-1} u - \mu |u|^{q-1} u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \\ u \in C^2, 0 \leq u(x) \rightarrow 0 & \text{per } |x| \rightarrow +\infty, u \neq 0 \end{cases}$$

$p, q > 1$, $\lambda, \mu > 0$, $n \geq 3$. In questo caso sono soddisfatte le ipotesi del Teorema 2.1 se $1 < q < p < \frac{n+2}{n-2}$.

Se $q \leq \frac{n+2}{n-2} \leq p$ vale la (1.7) ed allora (2.9) non ha soluzione (ricordiamo che ogni soluzione di (1.9) è esponenzialmente decrescente all'infinito).

Se $p < q$ allora (2.9) ha soluzione se, e solo se, λ e μ sono tali che valga (1.6).

Infine, se $\frac{n+2}{n-1} < p < q$, Ni e Serrin hanno provato che (2.9) non ha soluzione ([N-S]).

BIBLIOGRAFIA

- [B-L] H. Berestycki, P.L. Lions, Nonlinear Scalar Field Equations, I, II, Arch. Rat. Mech. and Anal. 82 (1983).
- [B-G-K] H. Berestycki, T. Gallonet, O. Kavian, On the equation $\Delta u = g(u)$ in R^2 , CRAS 297 (1983).
- [B-K] H. Bezis-T. Kato, Remarks on the Schrödinger operator with singular complex potential, J. Math. Pures Appl. 58 (1979).
- [C] C.V. Coffman, Uniqueness of the ground state solution for $\Delta u - u + u^3 = 0$ and a variational characterization of other solutions, Arch. Rat. Mech. Anal. 46 (1972).
- [C-G-M] S. Coleman, V. Glazer, A. Martin, Action minima among solutions of a class of Euclidean scalar Field equations. Comm. Math. Phys. 58 (1978).
- [K] T. Kato, Growth properties of solutions of the reduced wave equation with a variable coefficient, Comm. Pure Applied Math. 12 (1959).
- [L] E. Lanconelli, Seminario di Analisi Matematica dell'Istituto Matematico di Bologna, 1982-83.
- [N-S] W.M.Ni, J. Serrin, Non existence Theorems for quasilinear partial differential equations (in corso di stampa).

- [R] P. Rabinowitz, Variational methods for nonlinear eigenvalue problem, In Eigenvalues of Non-Linear problems, CIME, Ed. Cremonese, Roma (1974).
- [S] W.A. Strauss, Existence of solitary waves in higher dimensions, Comm. Math. Phys. 55 (1977).